

## **Cuestiones sobre economía**

**Julián Miguel SOLANA ÁLVAREZ**

Universidad Politécnica de Madrid

**Álvaro SOLANA MARTÍN**

**Resumen:** Una persona que no esté acostumbrada a la economía, se sorprendería con la aplicación que en ella se hace de las matemáticas; en este documento se muestran unos cuantos ejemplos, con el fin de llamar la atención de algunos economistas para, si es posible, reconsideren y revisen sus planteamientos.

**Abstract:** A person not trained in economics would be surprised when discovering the way some economist employ mathematics. This document shows some examples in order to call the economist attention on this topic so that these matters be either rethought or reviewed if possible.

**Palabras clave:** Función, ejes, conjunto de interés, dominio, tiempo, tecnología.

**Keywords:** Function, axis, interesting set, domain, time, technology.

### **Sumario:**

- I. Introducción.**
- II. El conjunto de interés.**
- III. Los ejes.**
- IV. Desplazamientos a izquierda y derecha de las curvas cuando las relaciones no son lineales.**
- V. Aproximación lineal.**
- VI. El factor tiempo (t).**

**VII. La tecnología (T).****VIII. Conclusiones.****IX. Bibliografía.**

**Recibido: octubre de 2011.**

**Aceptado: diciembre de 2011.**

## I. INTRODUCCIÓN

En este documento se pretende exponer algunas de las diferencias matemáticas elementales, tomadas a la ligera o no tratadas con la suficiente atención, identificadas en las bases de las teorías económicas macro y micro, que son las que pretenden formalizar matemáticamente las cuestiones económicas; por consiguiente, siéntanse eximidos del alcance de este artículo los seguidores de la escuela austriaca de Viena que consideran imposible dicha formalización, debido al número de variables involucradas (Mises, 2010).

Planteamientos como los apuntados en el párrafo anterior, pueden llevar a reconsiderar en profundidad toda una teoría científica. Por lo tanto, se anima a los economistas a que realicen una profunda revisión de “hipótesis” generalmente admitidas que, inadecuadamente interpretadas, podrían conducir a graves errores.

En este sentido, se analizarán el concepto de **dominio**, que suele ignorarse en economía, la **posición de los ejes** en muchas representaciones económicas, el concepto de **tiempo** que, salvo en aplicaciones muy concretas, suele ignorarse y, finalmente, el concepto de **tecnología**, tradicionalmente considerada un factor capital estático y dado, hipótesis muy razonables en el siglo XIX pero que en la actualidad, pudieran resultar completamente inadecuadas.

## II. EL CONJUNTO DE INTERÉS

Cuando se define una función matemática, la definición de su dominio, entendido como el conjunto de los posibles valores que puede tomar la variable independiente, es un aspecto fundamental, puesto que determina el conjunto de valores que tendrá la función.

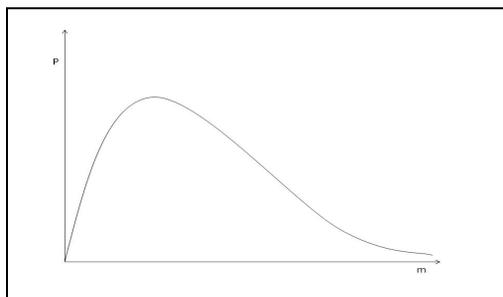
En economía este aspecto suele obviarse, lo que puede hacer pensar a quien consulte cualquier manual que el dominio es toda la parte positiva de la recta real, incluido el 0, puesto que los valores negativos tanto de función, como de variable suelen carecer de sentido económico (un precio o un tipo de interés negativos serían completamente absurdos).

En el caso del precio unitario, cuando se trate de ventas individualizadas dicho precio vendrá limitado por la menor unidad monetaria disponible, en nuestro caso el céntimo<sup>1</sup>. He aquí un límite inferior para el conjunto de interés de la variable precio; entendiendo por conjunto de interés el conjunto de valores al que se limita el estudio, puesto que fuera de él, si bien se extiende el dominio de la función, su estudio carece de sentido económico.

En cuanto a la existencia de un límite superior, también resulta un hecho evidente, el producto más caro del mundo (que será un producto de lujo al que no es aplicable la teoría del mercado libre) tiene un precio, por consiguiente no existe ningún precio superior a él. Podría argumentarse sobre el precio de alguna gran empresa, que es un problema que podría simplificarse a la determinación del precio de cada una de sus acciones que, evidentemente, resulta inferior al del bien más caro del mundo.

De este modo, se ha establecido que, si bien es una complicación adicional, la definición del conjunto de interés de valores del precio de un producto, podría resultar de gran ayuda. Por extensión, podría aplicarse el mismo concepto a cualquier variable económica.

Por otra parte, en la teoría de la producción (lo mismo podría decirse de la teoría del consumo, puesto que el formalismo matemático es idéntico) se comienza definiendo la producción en función de un factor determinado, con el fin de ilustrar la ley de productividad marginal decreciente (figura 1) y, en general, la ley de los rendimientos generales decrecientes. En dicha figura 1, se aprecia claramente que, a partir del máximo de la curva se entra en una zona de derroche del factor de producción, puesto que un incremento en el uso de dicho factor, no supone un incremento de la cantidad de producto obtenido, sino una disminución.

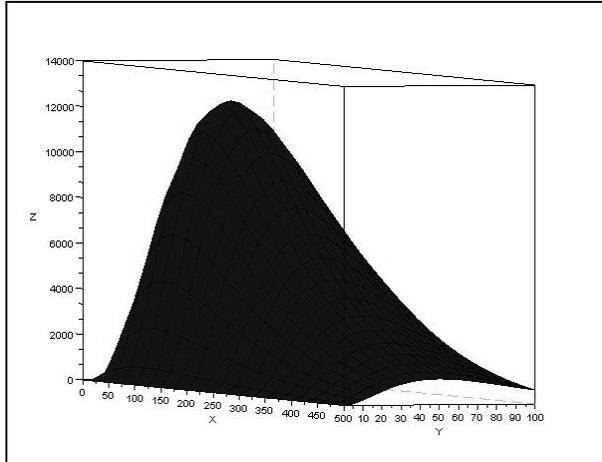


**Figura 1**

---

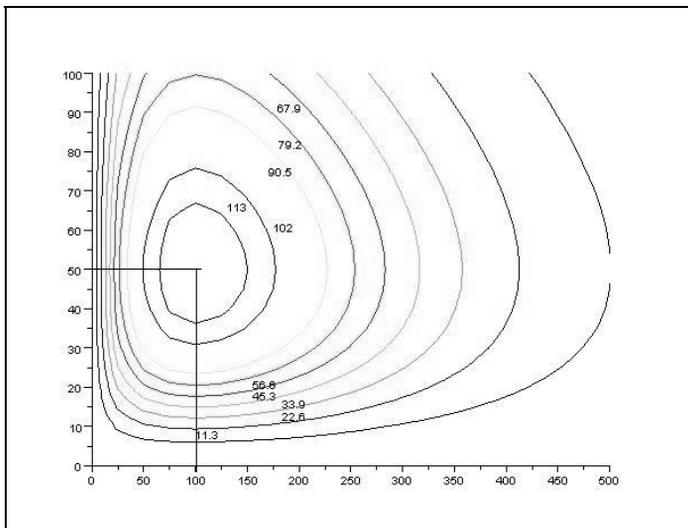
<sup>1</sup> Aunque también sería posible establecer una unidad monetaria inferior, si se realizasen ventas de unidades acumuladas (por ejemplo 1.000 unidades a 1 euro), evidentemente, debe tratarse de bienes de muy escaso valor.

Si se tuviesen en cuenta dos factores de producción (capital y trabajo, por ejemplo), la representación sería en el espacio, como se muestra en la figura 2.



**Figura 2**

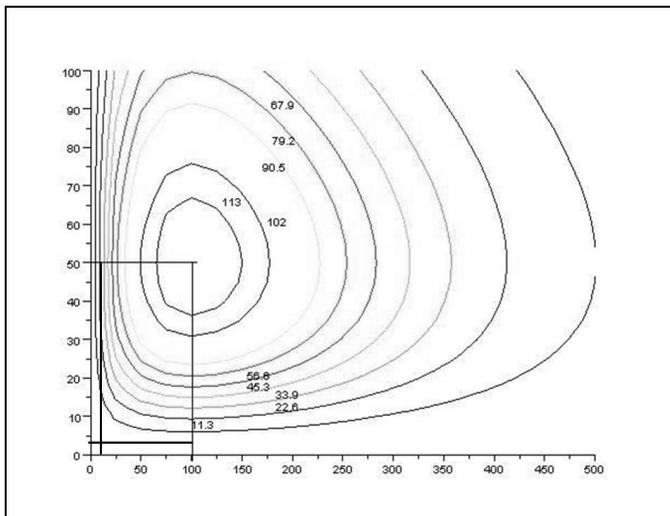
De ella, se obtendrían las líneas isocuantas, que son aquellas que corresponden a combinaciones de factores de producción que proporcionan la misma cantidad de producto. Se obtendría cortando la figura con planos paralelos al  $x_y$  ( $x$  e  $y$  representan los factores de producción y  $z$  la cantidad de producto obtenida) y resultaría la figura 3.



**Figura 3**

En dicha figura se han representado las coordenadas del máximo, punto a partir del cual se están derrochando los factores de producción y, por consiguiente, límite práctico de su uso. De aquí la importancia del conjunto de valores de interés; en este caso, si se pretende evitar el derroche de factores de producción, es imprescindible especificar  $FP < FP \text{ máx}$ , siendo FP cualquier factor de producción.

Por otra parte, se precisan unos valores mínimos de los factores trabajo y capital para emprender cualquier actividad; por consiguiente el conjunto de valores de interés de cada variable también tendrá un límite inferior  $FP > FP \text{ mín}$ , como se muestra en la figura 4.



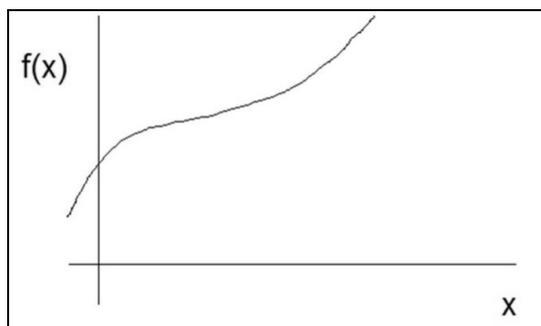
**Figura 4**

La aproximación de Cobb-Dougllass (Border 2004) mediante funciones de tipo potencial con el exponente inferior a la unidad, puede resultar correcta, siempre que se advierta de la limitación de dominio de las mismas, con el fin de que nadie se sienta tentado a extrapolar los resultados obtenidos a la zona de derroche de factores de producción.

Resulta evidente que el responsable de cualquier empresa conoce perfectamente sus limitaciones en cuanto a factor trabajo y factor capital; sin embargo, cuando se emplean las funciones de producción agregadas, como “puente” entre micro y macroeconomía, es posible que se pierda la consciencia de la indicada limitación, dentro del contexto macroeconómico.

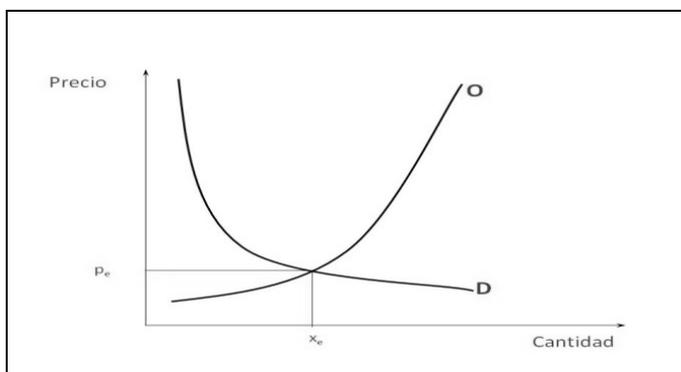
### III. LOS EJES

En teoría de funciones enseñan que el eje de abscisas debe coincidir con la variable independiente (la variable) y el de ordenadas con los valores de la variable dependiente (la función), como se muestra en la figura 5.



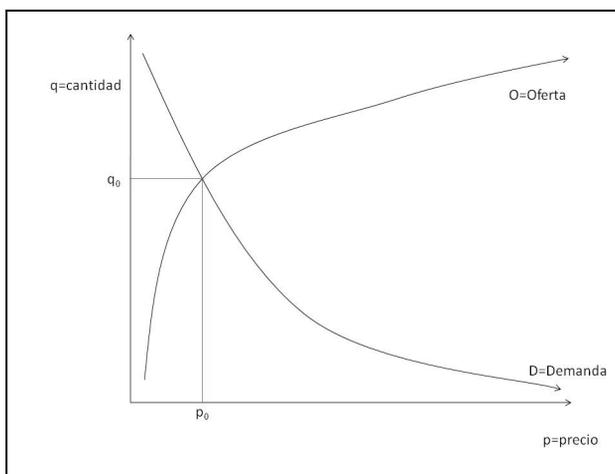
**Figura 5**

Sin embargo, cuando se plantea la ley de la oferta y la demanda, los ejes están cambiados, porque se considera que las cantidades ( $x$ ) son función del precio ( $p$ ), de forma matemática  $x=f(p)$ , dicha ley habitualmente la representan los economistas (Samuelson 2006) como se indica en la figura 6.



**Figura 6**

Conforme a la teoría de funciones, la representación debería ser como se muestra en la figura 7, en la que se ha sustituido la  $x$  que se refiere a la cantidad de producto, por  $q$ , con el fin de evitar la confusión de tender a poner la  $x$  en abscisas, lo que, posiblemente, sea la causa del problema. Esta representación, aunque matemáticamente más correcta, provocaría un gran impacto en los economistas.



**Figura 7**

Un caso similar sucede con las curvas IS-LM (Blanchard, 2011), se supone que ambas, tanto la curva IS como la LM, son función del tipo de interés establecido por el banco emisor; pues bien, el tipo de interés ( $i$ ) se representa en el eje de ordenadas.

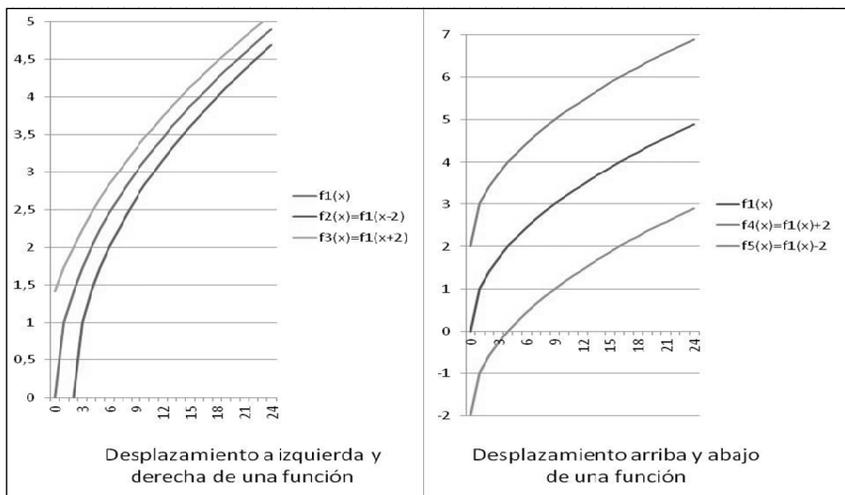
Estos cambios de ejes conducen a lo que se comenta a continuación, que hacen que el discurso de los economistas, a veces, resulte difícilmente comprensible.

#### **IV. DESPLAZAMIENTOS A IZQUIERDA Y DERECHA DE LAS CURVAS CUANDO LAS RELACIONES NO SON LINEALES**

En una función representada conforme al formalismo habitual en matemáticas, los desplazamientos a la derecha se harían con el cambio de variable  $x_n = x - a$  -variable nueva ( $x_n$ ) igual a la antigua ( $x$ ) menos la cantidad que se pretende desplazar ( $a$ )- y a la izquierda  $x_n = x + a$ ; pero al ser, en general, la relación no lineal el efecto del desplazamiento sólo es apreciable para  $x$  aproximadamente igual a " $a$ ", para valores de  $x$  mucho mayores o menores que " $a$ ", en general, el efecto carecerá de relevancia. Sin embargo, un desplazamiento hacia arriba o abajo, sí que es fácil de hacer, puesto que basta con sumar o restar una constante a la función.

Al estar cambiados los ejes, los desplazamientos hacia arriba o abajo, en una función representada conforme al formalismo matemático habitual, se transforman en desplazamientos a izquierda y derecha, cuando se emplea la

representación utilizada por los economistas. De ahí que cuando se refieren a expansión (contracción) de la oferta o la demanda, empleen como sinónimos desplazamientos a la derecha (izquierda) de dichas curvas. En la figura 5 se ilustra lo que se acaba de exponer.



**Figura 5**

## V. APROXIMACIÓN LINEAL

Cualquier función puede aproximarse mediante un polinomio aplicando el desarrollo en serie de Taylor (Strang 2010); también cualquier polinomio puede aproximarse por sus términos lineales; sin embargo, aparte del tipo de función, en general dicha aproximación sólo será lo suficientemente precisa más que en un intervalo de puntos muy próximos al que se ha empleado para realizar el desarrollo en serie de Taylor<sup>2</sup>.

Por consiguiente, cuando se hace una aproximación lineal a una función en un punto, con el fin de simplificar la solución de un problema; una vez obtenida dicha solución aproximada, si resulta muy apartada del punto en que se hizo la aproximación lineal, no será una solución aceptable porque la aproximación lineal sólo es válida en las proximidades del punto en que se hizo. Tampoco es correcto extrapolar el resultado, porque, en general, se cometerán importantes errores, por la misma causa.

<sup>2</sup> La fórmula del desarrollo en serie de Taylor en el punto a, de una función f(x) que, evidentemente, tiene que ser continua y derivable, está dado por:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x - a)^n \text{ en el punto a.}$$

Es comprensible la inclinación a aproximar linealmente funciones más complejas, por la facilidad de cálculo que su empleo supone, sin embargo hay que tener muy presente lo expresado en el párrafo anterior; puesto que en el caso contrario, cometer importantes errores es inevitable.

## VI. EL FACTOR TIEMPO (t)

Salvo en los estudios de capitalización y amortización, así como en las series temporales, en general, se echa en falta la variable temporal en la mayoría de los modelos sencillos de economía; puesto que se suelen realizar análisis de una sola variable independiente (el precio, la cantidad producida, la renta, etc.).

El argumento es la simplicidad en la explicación y no cargar los desarrollos matemáticos con funciones más complejas. Por eso, se suelen considerar constantes todas las condiciones de contorno, excepto una, por ejemplo el precio del producto. Sin embargo, los sistemas sociales no suelen ser estáticos, sino dinámicos; por consiguiente, convendría considerar, de alguna forma la componente temporal del problema.

Al final, la única dificultad que supone la inclusión de una variable temporal es incrementar la dimensión de los modelos habituales, que suelen ser bidimensionales, con lo que resultarían tridimensionales, obligando a representarlos en perspectiva; lo que posiblemente aportaría una nueva percepción de la situación.

En la actualidad, debido al vertiginoso cambio tecnológico que se está sufriendo, ignorar el factor tiempo o la tecnología, no resulta muy adecuado. Téngase en cuenta que los principios de la economía moderna se establecieron a partir de finales del siglo XIX, importante época de cambios, aunque no con tanta aceleración como ahora.

También es conocido el ciclo de vida de un producto, al principio su precio suele ser más elevado hasta que se alcanza la producción regular; con el tiempo, salvo que se realice una actualización de diseño, el producto se vuelve obsoleto y su precio disminuye, si se quiere mantener cierto volumen de ventas o, incluso, deja de producirse. Al no tenerse en consideración el efecto del tiempo, cabría preguntarse ¿la teoría microeconómica se aplica sólo a aquellos productos que se encuentran en plena vida activa? es decir, ¿no se tienen en cuenta los productos que se están introduciendo en el mercado ni los obsoletos, con el fin de considerar sólo los que se encuentran en la parte plana de su ciclo de vida?

## VII. LA TECNOLOGÍA (T)

En la economía clásica se suele considerar un factor capital porque, se supone, que puede adquirirse en el mercado. Sin embargo, de todos es conocida la existencia de patentes y modelos de utilidad, en general los llamados derechos de propiedad intelectual, que confieren a sus autores derechos monopolísticos sobre su creación durante un periodo de tiempo establecido por la ley; lo que hace que el mercado de la tecnología reciente sea imperfecto, al encontrarse protegido por los derechos de propiedad intelectual.

Por consiguiente, la tecnología reciente, entendida como aquella que se encuentra protegida por derechos de propiedad intelectual, sólo se podrá considerar un factor capital en el caso de que el propietario acepte venderla y el potencial comprador acepte las condiciones de precio, regalías, “saber hacer”, etc. impuestas por el propietario, para permitir su transferencia.

Téngase en cuenta que la posesión de una determinada tecnología proporciona una ventaja competitiva importante a la empresa que dispone de ella, motivo por el que su transferencia a terceros dista mucho de ser un problema trivial.

También, con el fin de simplificar los modelos, se suele considerar que la tecnología es constante; sin embargo, la evolución tecnológica es vertiginosa en la actualidad, lo que hace que la simplificación resulte sólo válida en un corto intervalo de tiempo.

## VIII. CONCLUSIONES

Existen unas normas, posiblemente no escritas y más bien de carácter consuetudinario, para el uso de las matemáticas que, inexplicablemente, se suelen modificar en algunos planteamientos económicos, como se acaba de mostrar. Esta forma de proceder pueda explicarse, posiblemente, al deseo de dificultar la comprensión con el fin de hacerla sólo accesible a los iniciados, (Galbraith 1991) que no es más que una forma de conseguir una cierta parcela de poder, haciendo que algo que debiera ser muy asequible, se vuelva complicado por un simple cambio de orientación de los ejes.

Por otra parte, una serie de simplificaciones habituales, tales como realizar aproximaciones lineales; ignorar los límites del conjunto de valores de interés; no tener en cuenta, habitualmente, el tiempo como variable; no tener presente la rapidez de la evolución tecnológica en la actualidad<sup>3</sup>; etc. pueden conducir a errores considerables en los modelos empleados.

---

<sup>3</sup> A este respecto téngase en cuenta la Ley de Moore (Moore 1965), que dice que el número de componentes electrónicos en un circuito integrado se duplica cada 18 meses; lo

Realmente, los modelos comentados con anterioridad son del siglo pasado, en la actualidad las matemáticas han avanzado mucho y sería un buen momento de intentar actualizar dichos modelos. A este respecto se sugiere la posibilidad de aplicar la teoría de redes en economía (Barabási 2001) unida con la dinámica de sistemas (Forrester 1972).

## IX. BIBLIOGRAFÍA

- BARABÁSI, A. L., *Linked*. Ed. A FLUME BOOK, 2001. Puede encontrarse el capítulo en: [http://www.barabasilab.com/LinkedBook/chapters/14Ch\\_Network Economy.pdf](http://www.barabasilab.com/LinkedBook/chapters/14Ch_Network_Economy.pdf) (consultado el 17-11-2011).
- BLANCHARD, O., *MACROECONOMICS*. Ed. Pearson Education, 2011.
- BORDER, K.C., *On the Cobb-Douglas Production Function*. Marzo 2004, en: <http://www.hss.caltech.edu/~kcb/Notes/CobbDouglas.pdf>. (Consultado el 17-11-2011).
- FORRESTER, J. W., *Industrial Dynamics*. MIT Press, 1972.
- GALBRAITH, J. K., *La anatomía del poder*. Ed. Plaza y Janes, 1991.
- MISES, L. von, *La acción humana: tratado de economía*. Unión editorial, 2010.
- MOORE, G. E., “Cramming more components onto integrated circuits”, en *Electronics*, Vol. 38, Num. 8, April 19, 1965. Puede encontrarse en: [ftp://download.intel.com/museum/Moores\\_Law/Articles-ress\\_Releases/Gordon\\_Moore\\_1965\\_Article.pdf](ftp://download.intel.com/museum/Moores_Law/Articles-ress_Releases/Gordon_Moore_1965_Article.pdf). (Consultado el 17-11-2011).
- SAMUELSON, P. A. & NORDHAUS, *Microeconomía*. Ed. McGraw-Hill, 2006.
- STRANG, G., *Calculus*. Ed. Wesley-Cambridge Press, 2010.

---

que hace que también lo hagan la capacidad de almacenamiento y procesamiento, produciéndose con dicha regularidad equipos electrónicos cada vez más baratos y potentes; en cualquier caso, el coste unitario de almacenamiento o procesamiento ha decrecido de forma exponencial durante más de los últimos cuarenta años.