

Pruebas de cointegración para demostrar el beneficio de emplear un portafolio de mínima varianza como benchmark en la gestión de fondos de pensiones mexicanos

Cointegration test of the benefits of a min variance portfolio as a benchmark for Mexican pension funds

Dr. Oscar V. DE LA TORRE TORRES

Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo, México

Dra. M^a Isabel MARTÍNEZ TORRE-ENCISO

Universidad Autónoma de Madrid, España

Resumen: En el presente artículo se propone el empleo del portafolio de mínima varianza como método de ponderación para un benchmark de estrategia que mida el desempeño de fondos de pensiones en México. En el mismo se contrastó éste portafolio contra el logrado con el máximo índice de Sharpe (1966). Lo anterior al realizar dos simulaciones de eventos discretos con datos diarios de enero de 2002 a mayo de 2013. Con el índice de Sharpe observado, la prueba de significancia de la Alfa de Jensen (1967), la prueba de expansión de Huberman y Kandel (1987) y pruebas de cointegración. En base a los resultados, se encontró que el portafolio de mínima varianza es preferible y útil para medir el desempeño de las SIEFORES o fondos de pensiones públicos en México.

Abstract: We propose the use of the min variance portfolio as weighting method for a strategy benchmark for pension funds' performance in Mexico. We test this benchmark against the Max Sharpe ratio one by performing two discrete event simulations with daily data from January 2002, to May 2013. With the observed Sharpe (1966) ratio, the Jensen's (1967) alpha significance test and the Huberman and Kandel (1987) spanning test and cointegration tests, we found that both benchmarks have a statistically equal performance, leading us to conclude about the usefulness of the min variance benchmark as performance index of the Mexican public pension funds (SIEFORES).

Palabras clave: Modelos de simulación, portafolio de mínima varianza, fondos de pensiones.

Códigos JEL: C63, G11, G23

JEL keywords: Simulation modeling, min variance portfolio, pension funds.

JEL key codes: C63, G11, G23

Sumario:

- I. Introducción.**
- II. Revisión de literatura y trabajos de investigación previos.**
- III. Fase experimental.**
- IV. Resultados de las simulaciones.**
- V. Conclusiones.**
- VI. Referencias bibliográficas.**

Recibido: octubre 2026.

Aceptado: diciembre 2016.

I. INTRODUCCIÓN

Los fondos de pensiones en México son de los principales medios de ahorro privado en México. Esto al representar \$2.8 billones en junio de 2013. Según las estimaciones de Albo et.al.¹, el valor de estos representará el 53% del PIB mexicano en el año 2050. De entre los tipos de planes de pensiones más empleados, se pueden encontrar los de beneficio definido (DB) y los de contribución definida (CD), siendo los últimos el tipo más utilizado a partir de la reforma a la Ley del Instituto Mexicano del Seguro Social del año 1997. Dado esto y como acotación del alcance temático del presente artículo, se observa que una referencia introductoria y detallada de las bondades respecto a los planes de pensiones en el país se puede encontrar en IMEF². El presente se enfocará a hacer una propuesta cuantitativa para medir el desempeño de los planes pensiones públicos de contribución definida, conocidos como Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro (SIEFORES). Esto observando que su empleo puede extenderse a planes de pensiones similares o de otra naturaleza, siempre y cuando empleen una política de inversión similar a la de los fondos de interés.

En base a lo anterior y dada la relevancia que representa este medio de reserva en México, es necesario conocer el desempeño en la administración de inversiones de las SIEFORES llevada a cabo por su correspondiente operadora (AFORE). Actualmente la Comisión Nacional del Sistema del Ahorro para el Retiro (CONSAR) publica solamente, y de manera espaciada, el rendimiento anualizado y libre de comisiones por administración de cuenta, que cada SIEFORE ha generado a sus derechohabientes. Sin embargo, poco se conoce, de manera abierta, sobre algunas cuestiones de relevancia como es el nivel de riesgo al que cada SIEFORE estuvo expuesta o, en su defecto, el desempeño y eficiencia, en términos de media-varianza, que las mismas han

¹ ALBO, A.; GONZÁLEZ, F.; HERNÁNDEZ, O.; HERRERA, C., y MUÑOZ, Á., “Hacia el fortalecimiento de los sistemas de pensiones en México”, en *BBVA-Research*, 2007. Recuperado el 15 de mayo de 2013, de http://www.bbvarsearch.com/KETD/fbin/mult/Haciael fortalecimientodelossistemasdepensionesenmex_tcm346-189743.pdf?ts=1642013

² IMEF, *Sistemas de Pensiones en México -perspectivas financieras y posibles soluciones-*. México, Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C., 2006.

observado. Dado que este último punto es de relevancia para que los derechohabientes puedan elegir la opción que consideren más pertinente a sus intereses, es de interés calcular un índice o *benchmark* que mida el comportamiento conjunto de este tipo de inversionista institucional (SIEFORES). Partiendo de esta necesidad y de manera propositiva, se presentan los resultados de un primer tipo de método de ponderación para cuantificar un índice de desempeño de las SIEFORES. Esto a efecto de que pueda ser implementado y publicado por la CONSAR de manera periódica.

Como primera solución a esta necesidad, se consideró la posibilidad de utilizar benchmarks ponderados con el método de capitalización, observando que este es el método más empleado en la práctica profesional (por ejemplo en el IPC de la Bolsa Mexicana de Valores, los benchmarks de Valmer, el MSCI World o el S&P500). Sin embargo, a pesar de que la información del valor de capitalización de cada SIEFORE es un dato público, se tiene la limitante de que la diferencia en el tamaño de las SIEFORES no es homogénea, llevando a niveles de concentración de inversión en las sociedades de las administradoras más grandes, por lo que el establecer la restricciones de cardinalidad³ apropiadas en este caso es un tema que requiere de investigación cuidadosa. A pesar de que el empleo de este método es muy socorrido, es de necesidad observar que no se recomienda, como primer punto de partida, su uso. Esto debido a que, por un lado, existen fuertes críticas teóricas y prácticas al mismo⁴ y por qué, por otro, el valor de capitalización histórico de varios de los benchmarks de mercado empleados en el presente trabajo no están disponibles al público en general (tal es el caso de los benchmarks de Valmer).

Partiendo del hecho de que el valor de la SIEFORES es un resultado directo del valor del portafolio en el que se invierten sus recursos, se buscó, como primera alternativa y para reducir el efecto del nivel de concentración, el calcular no un benchmark sobre el desempeño del precio de las SIEFORES; sino de uno sobre la política de inversión de las mismas, la cual es prácticamente homogénea para todas según se establece en la circular 12-19 de la CONSAR⁵.

Partiendo de esto y como primera alternativa al método de capitalización, se calculará un benchmark con el método del portafolio de mínima varianza. La razón de ello radica en que el mismo tiene bondades teóricas como es el

³ Niveles de inversión máximos y mínimos.

⁴ Las cuales se revisarán en breve en la revisión de literatura previa.

⁵ CONSAR, "Disposiciones de carácter general que establecen el régimen de inversión al que deberán sujetarse las sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro", *Normatividad - circulares CONSAR*, 2012 Recuperado el 10 de mayo de 2012: http://www.consar.gob.mx/normatividad/normatividad-normatividad_consar-circulares.shtml.

hecho de que no requiere supuestos previos respecto a la formación del vector de rendimientos esperados r . Por otro lado, resulta más apropiado, en términos teóricos, contra otras formas de ponderación como es el caso del portafolio con niveles de inversión homogéneos ($W_i = 1 / N$).

Dado esto, será necesario demostrar la utilidad práctica de esta propuesta por lo que, para hacerlo, se comparará el desempeño (*performance*) y la eficiencia media-varianza del benchmark contra uno que se selecciona con el método de la maximización del índice de Sharpe⁶, cartera que se conoce como “cartera tangente” y que representa el punto geométrico en donde se presupone que debe estar la verdadera cartera de mercado o benchmark de mercado⁷. Partiendo de esta premisa, se defenderá la hipótesis general de que “el benchmark de la política de inversión de las SIEFORES, calculado con el método de mínima varianza, lleva a niveles de eficiencia media-varianza similares a los del portafolio derivado con la maximización del índice de Sharpe”.

Para hacer esto, se realizaron dos simulaciones de eventos discretos con periodicidad diaria del día 3 de enero de 2002 al 31 de mayo de 2013 y se aplicaron a los resultados múltiples medidas de *performance* o desempeño. Los mismos demuestran que la hipótesis previa se sostiene por el hecho de que ambos portafolios (benchmark y referencia teórica) llevan a niveles de riesgo y rendimiento estadísticamente similares y por qué no existe una diferencia de desempeño estadísticamente significativa. Asimismo, se observó, tal como se esperaba en términos teóricos, que el benchmark propuesto lleva a una menor exposición al riesgo y tiene un buen nivel de representatividad de los mercados objeto de inversión.

La exposición del presente inicia con la revisión de literatura y trabajos de investigación previos, la cual apoya y explica la preferencia por el portafolio de mínima varianza. Esto junto con la necesidad de tener un método apropiado de ponderación para medir el desempeño de fondos de pensiones públicos. Después de ello, en un tercer apartado, se expone la metodología de prueba y se describen los datos empleados como insumos. Esto a efecto de presentar, acto seguido y en un cuarto apartado, los resultados observados con la simulaciones. Finalmente el documento presenta los comentarios y conclusiones, marcando algunas pautas para trabajos futuros de investigación.

⁶ SHARPE, W., “Mutual fund performance”, en *The journal of business*, 39/1 (1996) 119–18.

⁷ Presuponiendo expectativas homogéneas, eficiencia informacional y los múltiples supuestos establecidos para valuar activos de capital. Referirse a SHARPE, W., “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, en *The journal of finance*, XIX/3 (1964) 425–442; LINTNER, J., “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets”, en *The Review of Economics and Statistics*, 47/1 (1965) 13–37.

II. REVISIÓN DE LITERATURA Y TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN PREVIOS

Tal como Ibbotson⁸ sugiere, la asignación de activos es el paso más importante y sensible en el proceso de administración de portafolios. De todos los pasos en el mismo, determinar la adecuada política de inversión y el benchmark que la cuantifica son los pasos más sensibles de todos ellos. Tan sensible es esta definición de benchmark que el empleo de un índice ineficiente (en términos de media-varianza) llevaría a resultados de la misma naturaleza. Yendo a una perspectiva más amplia, tan relevante es tener un adecuado benchmark de desempeño que muchos modelos de selección óptima de portafolios emplean el mismo como piedra angular. Casos concretos se pueden encontrar en las primeras heurísticas de Sharpe⁹ o Treynor y Black¹⁰ o en modelos de Estadística bayesiana como el de Black y Litterman¹¹ o el de Chan, Karceski y Lakonishok¹², los cuales, a pesar de que reducen el error de estimación, no generarían mayor eficiencia con sus métodos si el benchmark que emplean como nivel de inversión neutral es ineficiente en los términos previamente citados¹³. Incluso otro tipo de modelos para selección óptima en un contexto de activos y pasivos¹⁴, como el modelo de Waring y Whitney¹⁵, requieren de una adecuada definición del benchmark de su política de inversión.

Para determinar la calidad del benchmark propuesto y siguiendo múltiples propuestas como las de Bailey¹⁶, se emplearán los criterios de representatividad de los activos (mercados) objeto de inversión y la exposición al riesgo. Esto a través del criterio de la máxima pérdida esperada (*max drawdown*). Estos serán utilizados de manera complementaria al criterio de eficiencia media-

⁸ IBBOTSON, R., "The importance of asset allocation", en *Financial Analysts Journal*, 66/2 (2010) 18–20.

⁹ SHARPE, W., "A simplified model for portfolio analysis", en *Management Science*, 9/2 (1963) 277–293.

¹⁰ TREYNOR, J., y BLACK, F., "How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection", en *The journal of business*, 46/1 (1973) 66–86.

¹¹ BLACK, F., y LITTERMAN, R., "Global portfolio optimization", en *Financial Analysts Journal*, 48/5 (1992) 28–43.

¹² CHAN, L. K. C., y KARCESKI, J., "On Portfolio Optimization : Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model", en *The review of financial studies*, 12/5 (1999) 937–974.

¹³ A lo largo del presente artículo, se hablará del concepto "eficiencia" como una eficiencia media-varianza y no de otro tipo de eficiencia como la informacional o alguna de naturaleza teórico-económica.

¹⁴ Como los empleados en un fondo de pensiones de beneficio definido.

¹⁵ WARING, B., y WHITNEY, D., "An Asset-Liability Version of the Capital Asset pricing Model with a multi-period two-fund theorem", en *The Journal of Portfolio Management*, 35/4 (2009) 111–131.

¹⁶ BAILEY, J. V., "Evaluating Benchmark Quality", en *Financial Analysts Journal*, 48/3 (1992) 33–40.

varianza, el cuál será medido a través de la alfa de Jensen¹⁷ y la prueba de extensión (*spanning test*) de Huberman y Kandel¹⁸.

La primera razón que motiva el empleo de un método de ponderación alternativo al de capitalización se puede encontrar en las críticas que al último se hacen. Dentro de las primeras pruebas que cuestionan la eficiencia de benchmarks públicos como el S&P500, se puede encontrar la de Grinold¹⁹, quien empleó el estadístico propuesto por Gibbons, Ross y Shanken²⁰ para demostrar la ineficiencia lograda con el método de capitalización del índice citado. Siguiendo a Grinold²¹ y a Haugen y Baker²² los autores cuestionan la eficiencia del índice Wilshire 5000, resaltando que incluso si el Mercado es informacionalmente eficiente, el portafolio seleccionado con el criterio de máximo índice de Sharpe lleva a resultados más eficientes que el anterior, situación que sugiere la presencia de expectativas heterogéneas entre los inversionistas. Al probar su hipótesis con la generación aleatoria de portafolios, presentaron en sus conclusiones que la participación de inversionistas extranjeros y el régimen fiscal son de las principales causas de lo observado.

Partiendo del estudio de Haugen y Backer²² e interesados en el portafolio de mínima varianza, Clarke, Silva y Thorley²³ contrastaron el índice S&P500 contra este portafolio teórico empleando datos diarios y mensuales de enero de 1968 a diciembre de 2005. En sus pruebas emplearon matrices de covarianzas logradas ya sea con el método de componentes principales o con métodos de encogimiento (*shrinkage*) en un programa cuadrático-paramétrico con restricciones ya sea de 3% de nivel máximo de inversión o de nivel objetivo de sensibilidad a los factores de mercado. Sus resultados demostraron que, con el portafolio propuesto (mínima varianza) se tiene un desempeño superior al S&P500, una reducción del 25% en el nivel de volatilidad y una mejora del 33% en la beta de mercado. Asimismo, observaron que el portafolio de mínima

¹⁷ JENSEN, M. C., "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964", en *Journal of Finance* (1967) 389-416.

¹⁸ HUBERMAN, G., y KANDEL, S., "Mean-Variance Spanning", en *The Journal of Finance*, 42/4 (1987), 873-888.

¹⁹ GIBBONS, M.; ROSS, S., y SHANKEN, J., "A Test of the Efficiency of a Given Portfolio", en *Econometrica*, 57/5 (1989) 1121-1152.

²⁰ GIBBONS, M.; ROSS, S., y SHANKEN, J., "A Test of the Efficiency of a Given Portfolio", en *Econometrica*, 57/5 (1989) 1121-1152.

²¹ GRINOLD, R. C., "Are Benchmark Portfolios Efficient?", en *The journal of portfolio management*, 19/1 (1989) 34-40.

²² HAUGEN, R. A., y BAKER, N. L., "The efficient market inefficiency of capitalization-weighted stock portfolios", en *The Journal of Portfolio Management*, 17/3 (1990) 35-40.

²³ CLARKE, R.; SILVA, H., y THORLEY, S., "Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market", en *The Journal of Portfolio Management*, 33/1 (2006) 1-14.

varianza tiene una amplia concentración en acciones de tamaño de capitalización pequeño (*small caps*).

Como resultado de este tipo de revisión y como una crítica al método de mínima varianza, Scherer²⁴ sugiere que este tipo de portafolio no es una estrategia apropiada contra el portafolio de mercado derivado con el método de capitalización (MSCI US), al demostrar que el portafolio de mínima varianza tiene un 83% de explicación con el modelo de Fama y French²⁵. También encontró que, si se tienen “anomalías” o movimientos atípicos en las variaciones porcentuales, la explicación de dicho modelo se incrementa. Con estos resultados, sugiere el empleo de un portafolio conformado de una combinación lineal de la cartera de mínima varianza y la de mercado (derivada por método de capitalización), a efecto de aprovechar las anomalías en el mercado, concentrando la inversión en el portafolio de mínima varianza en momentos “malos” y de hacer lo propio en el portafolio derivado con el método de capitalización en momentos “buenos”.

Como resultado de la revisión y crítica del método de capitalización para calcular benchmarks, Goltz y Le Sourd²⁶ sugieren que los índices determinados con el método de capitalización son aproximaciones muy limitadas del portafolio del mercado y, por ende, tienen una eficiencia media-varianza cuestionable. Esto lo hacen así para el caso de los benchmarks accionarios, observando que, como causa de su ineficiencia, el nivel de capitalización se relaciona con el nivel de riqueza invertida en acciones, siendo estas un subconjunto de la riqueza económica total circulante en los mercados financieros.

De manera similar a Scherer, Amenc et.al.²⁷ proponen el empleo de un portafolio consistente en una combinación lineal, a partes iguales, del portafolio de mínima varianza y la cartera seleccionada con el máximo índice de Sharpe. Esto junto con la implementación de un método de control, vía restricciones, del error de seguimiento o *tracking error*. Esto lo proponen así, a efecto de que los portafolios o índices determinados con este método, tengan un comportamiento terso en tiempos buenos y malos. Con datos históricos semanales de las acciones miembro del S&P500 de 1959 al año 2010, probaron el portafolio de mínima varianza, el derivado con la maximización del índice de Sharpe y su propuesta.

²⁴ SCHERER, B., “A note on the returns from minimum variance investing”, en *Journal of Empirical Finance*, 18/4 (2011) 652–660.

²⁵ FAMA, E. F., y FRENCH, K. R., “Common risk factors in the returns on stocks and bonds”, en *Journal of Financial Economics*, 33/1 (1992) 3–56.

²⁶ GOLTZ, F., y LE SOURD, V., “Does Finance Theory Make the Case for Capitalization-Weighted Indexing?”, en *The Journal of Index Investing*, 2/2 (2011) 59-75.

²⁷ AMENC, N.; GOLTZ, F.; LODH, A., y MARTELLINI, L., “Diversifying the Diversifiers and Tracking the Tracking Error”, en *The Journal of Portfolio Management*, 38/3 (2012) 72–88.

Esto lo hicieron contra el propio S&P500, llegando a resultados que demuestran que se logra una exposición al riesgo significativamente menor y un índice de Sharpe notable, al emplear los diferenciales respecto al S&P500.

Después de esta breve revisión de literatura, se observó que el empleo del portafolio de mínima varianza es una opción factible como método cuantitativo para calcular un benchmark que mida el desempeño global de las SIEFORES, representando el presente estudio uno de los primeros en medir el desempeño de este tipo de fondo en México.

Se considera que este método de ponderación es apropiado por el hecho de que a pesar de que la información de las SIEFORES es pública y disponible por múltiples medios electrónicos, la fusión entre SIEFORES y bancos en México, ha generado que algunas de ellas tengan tamaños notables, situación que podría llevar a niveles de concentración en los niveles de inversión. Como complemento a esta acotación, es de necesidad resaltar que el determinar las restricciones de niveles máximo y mínimo de inversión por SIEFORE es un tema que nunca se ha revisado y, el hacerlo, requiere de estudios más detallados.

Dado esto, se sugiere, como una primera alternativa que sea teóricamente válida, el empleo del portafolio de mínima varianza, aplicado no al precio de las SIEFORES, sino más bien a los seis mercados de la política de inversión presentada en el cuadro uno.

Cuadro 1. Niveles de inversión por tipo de SIEFORE autorizados por la CONSAR. Fuente: CONSAR (2012).

Tipo de activo / restricción (mínimo/máximo)	SIEFORE Básica pensiones	SIEFORE Básica 1	SIEFORE Básica 2	SIEFORE Básica 3	SIEFORE Básica 4
<i>Bonos gubernamentales mexicanos.</i>	(51%/100%)	(51%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)
<i>Bonos corporativos mexicanos.</i>	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)
<i>Mercado accionario mexicano.</i>	(0%/5%)	(0%/5%)	(0%/25%)	(0%/30%)	(0%/40%)
<i>Bonos gubernamentales y corporativos internacionales.</i>	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)	(0%/100%)
<i>Mercados accionarios internacionales.</i>	(0%/5%)	(0%/5%)	(0%/25%)	(0%/30%)	(0%/40%)
<i>Mercancías.</i>	0%	0%	(0%/5%)	(0%/10%)	(0%/10%)
<i>Exposición al riesgo cambiario</i>	0%	(0%/20%)	(0%/20%)	(0%/20%)	(0%/20%)

En la misma se presentan los límites máximo y mínimo de inversión por tipo de SIEFORE, citando los seis mercados objeto de inversión permitidos por la circular 12-19 de la CONSAR²⁸. Esto se propone así ya que, como se mencionó previamente, el precio de la acción es resultado de la política de inversión autorizada por la CONSAR (presentada en el cuadro 1) y esta puede ser modelada a través de un benchmark o índice de desempeño que tendrá, como resultado, un comportamiento de la política de inversión de todas las SIEFORES, la cual es estándar dados los lineamientos legales establecidos por la CONSAR.

Para probar su utilidad práctica, se correrá una simulación de eventos discretos con los índices de mercado y las restricciones de cardinalidad (máximos y mínimos de inversión) del cuadro dos (que se basa en el cuadro uno). Con la misma se comparará el portafolio con la mínima varianza y el seleccionado con el máximo índice de Sharpe (la referencia teórica). Los pesos del portafolio de la mínima varianza serán utilizados para calcular, de manera diaria, un índice de desempeño de “mínima varianza”, que se comparará contra otro de “máximo índice de Sharpe”.

No se empleará ninguno de los modelos cuantitativos de selección de portafolios de Scherer²⁹ o Amenc et.al.³⁰ debido a que, para el primer caso, no se tiene el histórico de los valores de capitalización de algunos índices (como los de Valmer) y, para el segundo, los autores no dan una explicación de por qué emplear una proporción 50%-50% y no otras combinaciones lineales. Dadas estas circunstancias, por el hecho de que no se requiere un supuesto previo respecto a la cuantificación del vector de rendimientos y por su conveniencia e interpretación teórica, el portafolio de mínima varianza resulta una primera opción a explorar para determinar un benchmark o índice de desempeño de las SIEFORES.

²⁸ CONSAR, “Disposiciones de carácter general que establecen el régimen de inversión al que deberán sujetarse las sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro”, *Normatividad - circulares CONSAR*, 2012. Recuperado el 10 de mayo de 2012, de http://www.consar.gob.mx/normatividad/normatividad-normatividad_consar-circulares.shtml

²⁹ SCHERER, B., “A note on the returns from minimum variance investing”, en *Journal of Empirical Finance*, 18/4 (2011) 652–660.

³⁰ AMENC, N.; GOLTZ, F.; LODH, A., y MARTELLINI, L., “Diversifying the Diversifiers and Tracking the Tracking Error”, en *The Journal of Portfolio Management*, 38/3 (2012) 72–88.

Cuadro 2. Niveles de inversión empleados como parte de la política de inversión en las simulaciones. Fuente: Basado en la Tabla 1.

Tipo de activo / restricción (mínimo/máximo)	Índice	Proveedor	Ticker	Restricciones de inversión empleadas.
<i>Bonos gubernamentales mexicanos. 1/</i>	Valmer Government	VALMER-BMV	Mex-Government	(51%/100%)
<i>Bonos corporativos mexicanos. 1/</i>	Valmer Corporate	VALMER-BMV	Mex-Corporate	(8.17%/100%)
<i>Mercado accionario mexicano.</i>	IPC	Bolsa Mexicana de Valores (BMV)	Mex-Equity	(3.26%/40%)
<i>Bonos gubernamentales y corporativos internacionales. 2/</i>	World Bond Investment Grade ex MBS	Citigroup Inc.	World Fixed-Income ex MSB	(1.63%/100%)
<i>Mercados accionarios internacionales. 3/</i>	MSCI World	MSCI Inc.	World Equity	(0.65%/40%)
<i>Mercancías. 4/</i>	DJ-UBS commodity index	Dow Jones - Citigroup	Commodities	(0.81%/10%)
Exposición al riesgo cambiario				(0%/20%)
1/ Solo activos financieros con calificación crediticia de mxA.				
2/ Solo activos con calificación de A+ o mayor.				
3/ Solo a través de benchmarks autorizados en el apéndice M de las reglas de la CONSAS (2012).				
4/ En el presente artículo, las mercancías se asumirán como activos locales a pesar de que se denominan en USD. Esto es así porque el programa cuadrático empleado para obtener los portafolios de mínima varianza y máximo Sharpe conduciría a un nivel marginal de inversión al combinar la restricción de tipo de activo de 40% más el 20% de inversión en activos extranjeros.				
Nota metodológica: Los niveles de inversión mínimos aplicables a activos que no son bonos gubernamentales mexicanos fueron calculados al dividir 49% entre seis y, posteriormente, multiplicando este número por el nivel máximo de inversión en cada activo y por su máximo nivel de exposición cambiaria. Por ejemplo, el nivel mínimo en mercados accionarios internacionales se calculó como: $(49\%/6)*(40%)*(20\%)=8.17\%*40\%*20\%=0.65\%$.				

III. FASE EXPERIMENTAL

Tal como se mencionó previamente, para probar la eficiencia media-varianza del benchmark de mínima varianza (MV) se corrió una simulación de eventos discretos (backtest) sobre el mismo y el portafolio con el máximo índice de Sharpe (MS). Para realizar esto, se emplearon datos de periodicidad diaria del 3 de enero de 2001 al 27 de mayo de 2013. Las simulaciones se realizaron a

través de una aplicación informática desarrollada en MATLAB con datos extraídos de Bloomberg. Con estos datos se calcularon los valores (P_t) de los índices MV y MS y, para poder analizar los mismos, se calcularon las variaciones porcentuales diarias de cada caso con la siguiente expresión:

$$\Delta\%_{P,t} = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (1)$$

De la expresión anterior se corrieron análisis del 3 de enero de 2002 en adelante y se calculó la matriz de covarianzas (\mathbf{C}) de las $t - 250$ observaciones. Dado esto, se obtuvo el portafolio MV y el MS, el cual cumple con la siguiente expresión, partiendo de un vector de niveles máximos (\mathbf{l}) de inversión y uno de mínimos (\mathbf{h}):

$$\arg \max_{\mathbf{w}_p} = (\mathbf{W}'_p [(\mathbf{r} - r_f) \cdot \mathbf{1}]) (\mathbf{W}'_p \mathbf{C} \mathbf{W}_p)^{-1/2}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'_p \mathbf{1} &= 1 \\ \mathbf{W}_p &\leq \mathbf{h} \\ \mathbf{W}_p &\geq \mathbf{l} \end{aligned} \quad (2)$$

Los vectores de niveles de inversión en cada uno de los dos portafolios previamente seleccionados se utilizaron para calcular dos benchmarks con valor base 100 en enero 3 de 2002. Con el valor simulado (P_t) de cada uno de ellos se obtuvo la variación porcentual en t con la siguiente expresión:

$$\Delta\%_{P,t} = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (3)$$

Con estas variaciones porcentuales se calculó la desviación estándar ($\sigma_{P,t}$) de las $t-30$ observaciones de $\Delta\%_{P,t}$. Con los datos de las variaciones porcentuales y las desviaciones estándar observadas, se calculó el índice de Sharpe³¹ observado de siguiente forma:

$$S_{P,t} = (\Delta\%_{P,t} - r_f) / \sigma_{P,t} \quad (4)$$

³¹ SHARPE, W., "Mutual fund performance", en *The journal of business*, 39/1 (1966) 119-18.

En el cálculo anterior, se utilizó la tasa equivalente diaria de los CETES de 28 días negociados en mercado secundario, publicada por el Banco de México³².

Para demostrar que la eficiencia media-varianza del benchmark de mínima varianza (MV) es estadísticamente igual al del máximo índice de Sharpe (MS) se corrió un modelo CAPM estándar o mono factor dado por la siguiente regresión lineal en la que se presupondrá que MV es la cartera de mercado y MS el portafolio activo:

$$\Delta\%_{MS,t} = \alpha + \beta(\Delta\%_{MV,t}) + \varepsilon_t \quad (5)$$

Si se encuentra una alfa de Jensen³³ no significativa, es decir si la hipótesis $H_0 : \alpha=0$ se comprueba, se tendrá evidencia de que la eficiencia media-varianza entre ambos portafolios es la misma. Como comentario metodológico, es necesario observar que se redujo el impacto de la autocorrelación y heteroscedasticidad en los residuales ε_t , al calcular estimadores y errores robustos con el método de Newey y West³⁴.

Para complementar el estudio anterior, se aplicó a (5) la prueba de extensión (*spanning test*) de Huberman y Kandel³⁵. Esto para determinar si el desempeño de MS puede aproximarse a través de MV. Es decir, definir si el desempeño de ambos benchmarks es tan similar que no existe distinción entre emplear uno u otro para llegar a los mismos resultados de eficiencia media-varianza. Lo anterior se comprobará a través de la siguiente hipótesis nula: $H_0 : \alpha=0; \beta=1$.

Una vez que se realizó esta prueba, se enfocó la atención a medir el nivel de exposición al riesgo. Esto se logró por medio de un conteo del número de días en los que la variación porcentual (ya sea de MV o de MS) fue inferior a -0.7%. Este límite se fijó en base al límite máximo de Valor en Riesgo diario al que pueden exponerse las SIEFORES, el cual está establecido en la disposición vigésima segunda de la circular 12-19 de la

³² Banco de México, Vector de precios de títulos gubernamentales (on the run), 2013. Recuperado el 28 de agosto de 2013, de <http://www.banxico.org.mx/portalesEspecializados/tasas>

³³ JENSEN, M. C., "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964", en *Journal of Finance*, 1967, 389-416.

³⁴ NEWAY, W. K., y WEST, K. D., "A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix", en *Econometrica*, 55/3 (1987) 703-708.

³⁵ HUBERMAN, G., y KANDEL, S., "Mean-Variance Spanning", en *The Journal of Finance*, 42/4 (1987) 873-888.

CON SAR³⁶. Una vez que se realizó el conteo, se empleó una prueba de hipótesis con función de probabilidad Poisson, a través del siguiente parámetro $\lambda = 2,871 \cdot 5\% = 143.5 \approx 144$.

Por último y como prueba de calidad de benchmark se midió la representatividad que tienen tanto MV como MS de los seis mercados objeto de inversión expuestos en las tablas uno y dos. Para ello, se utilizaron las series históricas de los dos benchmarks como variables dependientes en la prueba de cointegración de dos pasos de Engle y Granger³⁷, empleando a su vez las series históricas de los seis mercados objeto de inversión como regresoras. Si se observa la presencia de cointegración en los dos modelos, se podrá concluir que los benchmarks modelados son representativos de los mercados objeto de inversión, al ser estas variables explicativas de los anteriores y al tener una relación de largo plazo estadísticamente fundamentada.

En este punto es de necesidad observar que no se empleó otro tipo de pruebas de cointegración ya que solo se busca establecer si existe relación estadística de largo plazo (léase representatividad) entre los seis mercados objeto de inversión y los benchmarks simulados. Otro tipo de circunstancias de interés como las pruebas de cointegración más elaboradas y el sentido de la causalidad entre series de tiempo, son aspectos que se dejan para otras pruebas. Asimismo, la prueba de cointegración se realizó empleando solo un rezago en los residuales y los valores críticos τ de la prueba de raíz unitaria de Newey y West³⁸.

IV. RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES

La figura uno muestra el desempeño histórico de los dos índices o benchmarks simulados. En la misma se puede apreciar que el comportamiento de MS tiende a ser más volátil que MV. Sin embargo, la tendencia en ambos es prácticamente la misma y el desempeño de estos se aprecia similar. A pesar de que en algunos periodos MS tiene desempeños superiores a MV, el diferencial tiende a reducirse a cero como resultado de múltiples cambios en

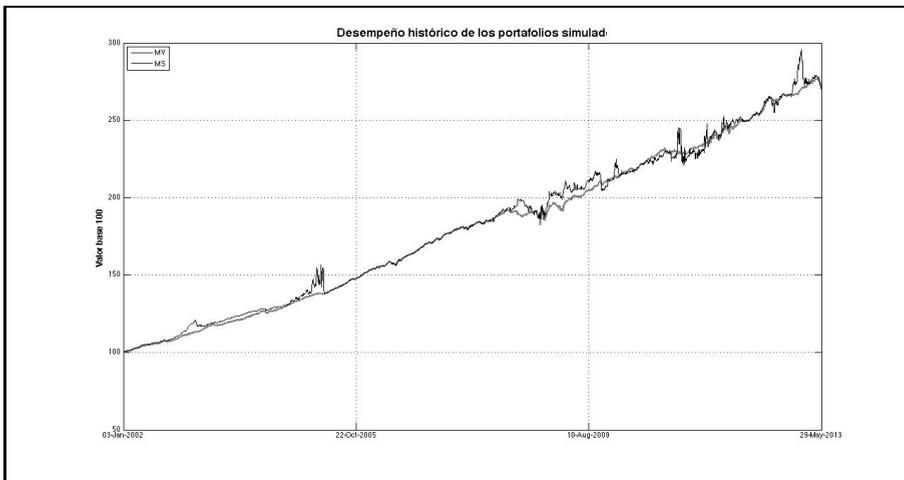
³⁶ CON SAR, “Disposiciones de carácter general que establecen el régimen de inversión al que deberán sujetarse las sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro”, *Normatividad - circulares CON SAR*, 2012 Recuperado el 10 de mayo de 2012, de http://www.consar.gob.mx/normatividad/normatividad-normatividad_consar-circulares.shtml

³⁷ ENGLE, R. F., y GRANGER, C. W. J., “Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing”, en *Econometrica*, 55/2 (1987) 251–276.

³⁸ NEWEY, W. K., y WEST, K. D., “A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix”, en *Econometrica*, 55/3 (1987) 703–708.

el comportamiento de este benchmark. Por otro lado, se puede apreciar que el comportamiento de MV es más suave y continuo. Esto es así incluso en momentos de crisis financiera y económica como es el periodo septiembre-octubre de 2008. En este intervalo de tiempo, MV tuvo una minusvalía más moderada respecto a MS, situación que puede representar una prueba empírica, para el caso mexicano, de por qué Amenc et.al.³⁹ sugieren el empleo de su método de selección de portafolios consistente en una combinación lineal de MV y MS.

Figura 1. Desempeño histórico de los dos índices simulados. Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.



Al comparar el índice de Sharpe observado y calculado con (4), se puede apreciar, en la figura dos, cómo el comportamiento de la eficiencia media-varianza de MS es más volátil e inestable que el de MV. Al comparar esto con el diagrama de caja de la figura tres, se puede apreciar este efecto con los valores más extremos que algunas observaciones individuales de MS tienen respecto a las de MV. Sin embargo, al realizar una prueba ANOVA unidireccional se puede observar, en el cuadro tres, que no existe diferencia estadística entre los valores de los índices de Sharpe observados en ambos índices o benchmarks simulados, lo que lleva a una primera prueba para demostrar la hipótesis establecida en el presente artículo.

³⁹ AMENC, N.; GOLTZ, F.; LODH, A., y MARTELLINI, L., "Diversifying the Diversifiers and Tracking the Tracking Error", en *The Journal of Portfolio Management*, 38/3 (2012) 72-88.

Cuadro 3. Prueba ANOVA de los índices de Sharpe observados.
Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Fuente	Suma cuadrática	Grados de libertad	Media cuadrática	F	Prob>F
Columnas	2.5363	1.0000	2.5363	0.3980	52.81%
Error	36,576.3410	5,740.0000	6.3722		
Total	36,578.8773	5,741.0000			

Figura 2. Desempeño histórico de los índices de Sharpe observados en los benchmarks simulados. Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

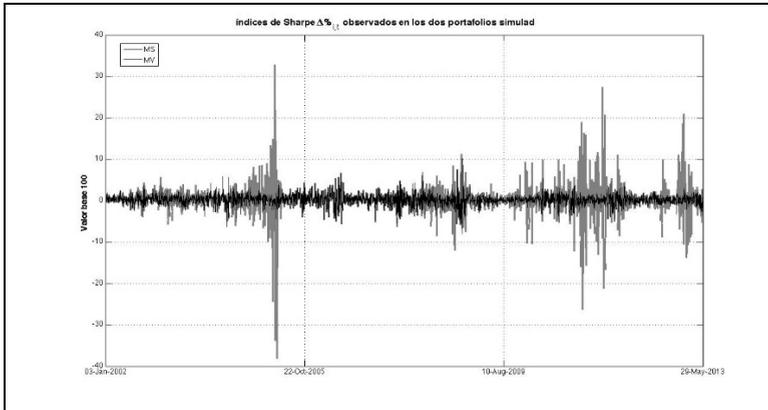
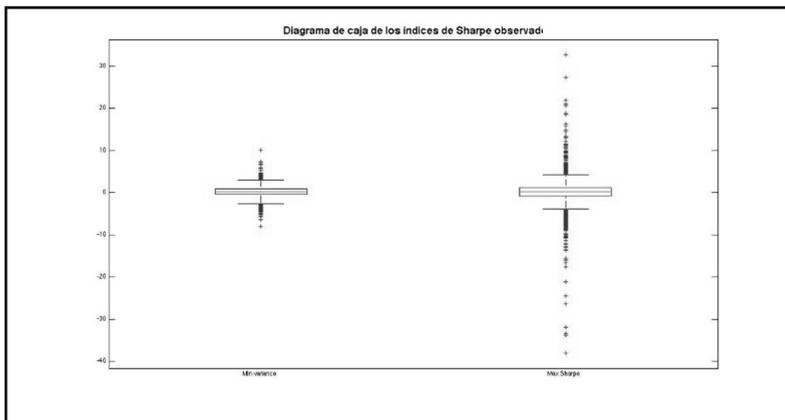


Figura 3 Diagrama de caja de los índices de Sharpe observados en los benchmarks simulados. Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.



Para complementar lo anterior, se calculó la alfa de Jensen con la regresión dada en (5) y se probó su nivel de significancia, el cual se presenta en el cuadro cuatro. En la misma se observa que la probabilidad del coeficiente es de 39.85%, y el valor del mismo es muy cercano a cero, lo que lleva a observar que MS no tiene un desempeño superior al de MV (empleado como cartera o factor de mercado), al no existir un rendimiento inercial o no sistemático positivo.

Cuadro 4. Alfa de Jensen del índice calculado con la maximización del índice de Sharpe respecto el portafolio de mínima varianza empleado como factor de mercado.

Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Mercado	Coefficiente	Error estándar Newey-West	Valor t Newey-West.	Probabilidad
α	0.0001	0.0012	0.0469	39.85%
β	1.0039	0.0114	88.4374	0.00%
R^2	0.96		$R^2_{aj.}$	0.96
<i>Stat. F</i>	2,924.49		<i>Prob.>F</i>	0.00%

Cuadro 5. Prueba de expansión (spanning test) de Huberman and Kandel's (1987)

Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Mercado	Coefficiente	Error estándar Newey-West	Valor t Newey-West.	Probabilidad
α	0.0001	0.0012	0.0469	39.85%
β	1.0039	0.0114	88.4374	37.64%
R^2	0.96		$R^2_{aj.}$	0.96
<i>Stat. F</i>	2,924.49		<i>Prob.>F</i>	0.00%

En el cuadro cinco se extiende la prueba anterior con la prueba de expansión (*spanning test*) de Huberman y Kandel⁴⁰. Dado que se está probando que $\beta=1$, se observa que ahora la probabilidad de este coeficiente es de 37.64%. Es decir, la probabilidad de que efectivamente su valor sea de uno a nivel asintótico es en dicha magnitud. Este resultado sugiere que MV puede ser un

⁴⁰ HUBERMAN, G., y KANDEL, S., "Mean-Variance Spanning", en *The Journal of Finance*, 42/4 (1987) 873-888.

buen sustituto para obtener el mismo desempeño de MS. Es decir, el nivel de desempeño de MS, a pesar de ser más volátil y (en el corto plazo) llevar a niveles de desempeño más altos que los de MV, puede ser aproximado por MS por lo que emplear MV o MS resulta indistinto.

Aquí es importante señalar que este resultado, dado el conjunto cerrado y específico de índices de mercado utilizados, puede deberse a que la frontera eficiente generada con los datos tiene un nivel de covarianza conjunta⁴¹ muy específico, el cual hace que MV y MS siempre se encuentren lo suficientemente cercanos. Esto al grado de que la diferencia en el nivel de eficiencia media-varianza sea mínimo.

Dado que se encontró una similitud estadística en el desempeño de ambos benchmarks, ahora se buscará el nivel de exposición al riesgo como criterio diferenciador. Esto, como se describió previamente, se medirá con un conteo del número de días en los que los benchmarks simulados tuvieron una variación porcentual inferior a -0.7% (criterio de max drawdown). Los resultados de esto y la prueba de probabilidad Poisson llevaron a los resultados de el cuadro seis. En la misma se nota una diferencia sustancial ya que, como se esperaría teóricamente de MV, el nivel de días con variaciones inferiores a -0.7% es de solo cinco contra 103 de MS, lo que lleva a comprobar algo teóricamente esperado pero que presenta, en términos más tangibles o numéricos, una bondad de emplear el portafolio de mínima varianza como método de ponderación de un benchmark para medir el desempeño de las SIEFORES.

Cuadro 6. Prueba de máxima pérdida potencial (-0.7% de umbral).

Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Benchmark	Valor crítico de probabilidad Poisson.	Número de días en donde se observó $\Delta\% < -0.7\%$
<i>Min Variance</i>	144	5
<i>Max Sharpe</i>	144	103

Para robustecer este primer resultado, se probó ahora la representatividad que MV y MS tienen de los mercados objeto de inversión. Es decir se responde la pregunta ¿Qué tan bueno es cada caso para medir el desempeño de los seis mercados objeto de inversión suponiendo que los mismos conforman un mismo mercado o conjunto de activos financieros objeto de inversión? Esto se midió con los resultados de las pruebas de cointegración de dos pasos de

⁴¹ Medida con la matriz C.

Engle y Granger, las cuales son expuestas en las tablas siete y ocho para MV y MS respectivamente. En las mismas se puede apreciar que ambos benchmarks están cointegrados con los seis mercados objeto de inversión. Sin embargo, MV es representativo de solo cinco de los seis mercados (con excepción de las acciones extranjeras que tienen una probabilidad de 29.41%); siendo MS representativo de solo cuatro de ellos (las acciones extranjeras con 48.46% y los bonos corporativos mexicanos con 45.45% de probabilidad). Esto lleva a establecer otro criterio de diferenciación entre ambos índices, así como de preferencia por MV respecto a MS, situación que se comprueba al verificar los criterios de bondad de ajuste de las regresiones auxiliares de cointegración (en específico el Hannan-Quinn).

Cuadro 7. Prueba de cointegración de Engle-Granger para el benchmark de mínima varianza.

Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Valores de la regresión auxiliar				
Mercado	Coefficiente	Error estándar	Valor t	Probabilidad
α	0.0000	0.0000	2.90	0.37%
<i>Mex-Government</i>	0.5192	0.0156	33.21	0.00%
<i>Mex-Corporate</i>	0.2710	0.0202	13.41	0.00%
<i>Mex-Equity</i>	0.0599	0.0008	71.42	0.00%
<i>World Fixed-Income ex MBS</i>	0.0448	0.0010	43.70	0.00%
<i>World Equity</i>	0.0012	0.0011	1.05	29.41%
<i>Commodities</i>	0.0100	0.0007	14.71	0.00%
R^2 aj.	0.91	RMSE	0.0005	
<i>Durbin-Watson</i>	2.05	Hannan-Quinn	-35,830.99	
Prueba de cointegración de los residuales				
Variable dependiente	Valor crítico τ	Estadístico	Valor de probabilidad	Conclusión de la prueba
<i>Benchmark de mínima varianza</i>	-4.9931	-54.8188	0.001	Cointegrado

Cuadro 8. Prueba de cointegración de Engle-Granger para el benchmark logrado con el máximo índice de Sharpe. Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Valores de la regresión auxiliar				
Mercado	Coefficiente	Error estándar	Valor t	Probabilidad
α	0.0001	0.00	0.68	49.72%
<i>Mex-Government</i>	0.4566	0.16	2.84	0.46%
<i>Mex-Corporate</i>	0.1557	0.21	0.75	45.40%
<i>Mex-Equity</i>	0.0615	0.01	7.12	0.00%
<i>World Fixed-Income ex MBS</i>	0.1247	0.01	11.82	0.00%
<i>World Equity</i>	0.0080	0.01	0.70	48.46%
<i>Commodities</i>	0.0173	0.01	2.47	1.34%
R^2 aj.	0.11	RMSE	0.0048	
<i>Durbin-Watson</i>	2.13	Hannan-Quinn	-22,444.40	
Prueba de cointegración de los residuales				
Variable dependiente	Valor crítico τ	Estadístico	Valor de probabilidad	Conclusión de la prueba
<i>Benchmark de máximo Sharpe</i>	-4.9931	-57.1416	0.001	Cointegrado

V. CONCLUSIONES

En el presente artículo se propuso el empleo del portafolio de mínima varianza como método de ponderación para calcular un benchmark que mida el desempeño de la política de inversión de las SIEFORES y, por ende, del desempeño de su valor como inversión. Al hacer esto, se demostró su validez como índice al demostrar la hipótesis de trabajo dada por “el benchmark de la política de inversión de las SIEFORES, calculado con el método de mínima varianza, lleva a niveles de eficiencia media-varianza similares a los del portafolio derivado con la maximización del índice de Sharpe”. Esto se logró al contrastar el desempeño del mismo contra uno derivado con el criterio de maximización del criterio de Sharpe.

Para hacer lo anterior se corrieron dos simulaciones de eventos discretos de periodicidad diaria del 3 de enero de 2002 al 27 de mayo de 2013. Con las mismas se empleó al índice de mínima varianza (MV) como “cartera de mercado” y al portafolio de máximo índice de Sharpe (MS) como cartera activa. Esto en un modelo CAPM estándar o de un factor, siendo éste el índice

MV. Con el mismo se encontró que la alfa de Jensen (1967) no es significativa, situación que sugiere que MV y MS tienen niveles de eficiencia media-varianza similares.

Por otro lado se aplicó la prueba de expansión (*spanning test*) de Huberman y Kandel⁴² para demostrar la hipótesis $\alpha=0, \beta=1$ en el modelo mono factor. Los resultados comprobaron la misma y sugieren que se puede emplear el índice MV como sustituto del MS. Es decir, a pesar de que MS se presupone teóricamente superior, MV es una muy apropiada aproximación del mismo y, por ende, puede emplearse en lugar del anterior.

Dado que se encontró que el desempeño de MV es similar al de MS, se enfocó la atención a comprobar la calidad del último, partiendo de algunos de los criterios de calidad de benchmark propuestos por Bailey⁴³ como son la exposición al riesgo medida por el conteo de días en que se supera la pérdida potencial (*max drawdown*) y la representatividad de los mercados objeto de inversión.

Para la primera prueba se contó el número de días en que el MV o MS tuvieron variaciones porcentuales inferiores a -0.7% (medida de pérdida potencial o VaR diario establecida por la CONSAR). Los resultados de las simulaciones observan que, tal como se esperaba teóricamente, MV tiene una exposición al riesgo notoriamente inferior respecto a MS, al tener solo cinco días en este caso contra 103 de MS.

Para medir la representatividad de los benchmarks se aplicó a cada caso la prueba de cointegración de dos pasos de Engle y Granger⁴⁴. Esto fue así debido a que, si MV o MS tienen representatividad de los mercados objeto de inversión, tendrán relaciones de largo plazo (estarán cointegrados) con los mismos. Los pruebas realizadas observan que, a pesar de que ambos índices están cointegrados con sus mercados, MV tiene una mayor representatividad debido a que cinco de los seis mercados objeto de inversión lo explican; situación que es contraria a MS al ser explicado solo por cuatro.

Al reunir las conclusiones de las múltiples pruebas realizadas, se puede observar que MV representa un método adecuado de ponderación para medir

⁴² HUBERMAN, G., y KANDEL, S., "Mean-Variance Spanning", en *The Journal of Finance*, 42/4 (1987) 873-888.

⁴³ BAILEY, J. V., "Evaluating Benchmark Quality", en *Financial Analysts Journal*, 48/3 (1992) 33-40.

⁴⁴ ENGLE, R. F., y GRANGER, C. W. J., "Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing", en *Econometrica*, 55/2 (1987) 251-276.

el desempeño de la política de inversión de las SIEFOREs y, por ende, del precio de las mismas. Esto por la eficiencia media-varianza que tiene así como la calidad que, como benchmark presenta. Con esto, la CONSAR podría tener un método teóricamente aceptable para proporcionar información a los usuarios o derechohabientes de las SIEFOREs. Esto a efecto de que puedan comparar el desempeño de su SIEFORE con el resto, a través de un solo indicador o benchmark.

Como algunas de las limitaciones del presente trabajo, se pueden mencionar que se trabajó con un conjunto cerrado de índices y, que al emplearse otros como universo de activos objeto de inversión, podría darse el caso de que la forma de la frontera eficiente observada en t cambie. Esto podría llevar a que los resultados sean diferentes, situación que deberá verificarse con estudios más exhaustivos.

Asimismo, se observa que se trabajó con restricciones de cardinalidad (límites máximos y mínimos de inversión) que parten de la circular 12-19 de la CONSAR⁴⁵. Dado esto, el determinar las restricciones de cardinalidad más apropiadas en las SIEFOREs y el correr las presentes simulaciones con índices de mercado, son guías para futuros trabajos de investigación.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBO, A.; GONZÁLEZ, F.; HERNÁNDEZ, O.; HERRERA, C., y MUÑOZ, Á., “Hacia el fortalecimiento de los sistemas de pensiones en México”, 2017. *BBVA- Research*. Recuperado el 15 de mayo de 2013, de http://www.bbvaesearch.com/KETD/fbin/mult/Haciaelfortalecimientodelossistemasdepensionesenmex_tcm346-189743.pdf?ts=1642013
- AMENC, N.; GOLTZ, F.; LODH, A., y Y MARTELLINI, L., “Diversifying the Diversifiers and Tracking the Tracking Error”, en *The Journal of Portfolio Management*, 38/3 (2012) 72-88.
- BAILEY, J. V., “Evaluating Benchmark Quality”, en *Financial Analysts Journal*, 48/3 (1992) 33-40.

⁴⁵ CONSAR, “Disposiciones de carácter general que establecen el régimen de inversión al que deberán sujetarse las sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro”, *Normatividad - circulares CONSAR*, 2012. Recuperado el 10 de mayo de 2012, de http://www.consar.gob.mx/normatividad/normatividad-normatividad_consar-circulares.shtml

- Banco de México, Vector de precios de títulos gubernamentales (on the run), 2013. Recuperado el 28 de agosto de 2013, de <http://www.banxico.org.mx/portalesEspecializados/tasas>
- BLACK, F., y LITTERMAN, R., “Global portfolio optimization”, en *Financial Analysts Journal*, 48/5 (1992) 28-43.
- CHAN, L. K. C., y KARCESKI, J., “On Portfolio Optimization : Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model”, en *The review of financial studies*, 15/5 (1999) 937-974.
- CLARKE, R.; SILVA, H.; y THORLEY, S., “Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market”, en *The Journal of Portfolio Management*, 33/1 (2006) 1-14.
- CONSAR, “Disposiciones de carácter general que establecen el régimen de inversión al que deberán sujetarse las sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro”, *Normatividad - circulares CONSAR*, 2012. Recuperado el 10 de mayo de 2012, de http://www.consar.gob.mx/normatividad/normatividad-normatividad_consar-circulares.shtml
- ENGLE, R. F., y GRANGER, C. W. J., “Co-Integration and Error Correction : Representation, Estimation, and Testing”, en *Econometrica*, 55/2 (1987) 251-276.
- FAMA, E. F., y FRENCH, K. R., “Common risk factors in the returns on stocks and bonds”, en *Journal of Financial Economics*, 33/1 (1992) 3-56.
- GIBBONS, M.; ROSS, S., y SHANKEN, J., “A Test of the Efficiency of a Given Portfolio”, en *Econometrica*, 57/5 (1989) 1121-1152.
- GOLTZ, F., y LE SOURD, V., “Does Finance Theory Make the Case for Capitalization-Weighted Indexing?”, en *The journal of index investing*, 2/2 (2011) 59-75.
- GRINOLD, R. C., “Are Benchmark Portfolios Efficient?”, en *The journal of portfolio management*, 19/1 (1989) 34-40.
- HUBERMAN, G., y KANDEL, S., “Mean-Variance Spanning”, en *The Journal of Finance*, 42/4 (1987) 873-888.
- IBBOTSON, R., “The importance of asset allocation”, en *Financial Analysts Journal*, 66/2 (2010) 18-20.

- IMEF, *Sistemas de Pensiones en México -perspectivas financieras y posibles soluciones-*. México: Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C., 2006.
- JENSEN, M. C., “The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964”, en *Journal of Finance*, 1967, pp. 389-416.
- LINTNER, J., “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets”, en *The Review of Economics and Statistics*, 47/1 (1965) 13-37.
- NEWEY, W. K., y WEST, K. D., “A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix”, en *Econometrica*, 55/3 (1987) 703-708.
- SCHERER, B., “A note on the returns from minimum variance investing”, en *Journal of Empirical Finance*, 18/4 (2011) 652-660.
- SHARPE, W., “A simplified model for portfolio analysis”, en *Management Science*, 9/2 (1963) 277-293.
- SHARPE, W., “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, en *The journal of finance*, XIX/3 (1964) 425-442.
- SHARPE, W., “Mutual fund performance”, en *The journal of business*, 39/1 (1966) 119-18.
- TREYNOR, J., y BLACK, F., “How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection”, en *The journal of business*, 46/1 (1973) 66-86.
- WARING, B., y WHITNEY, D., “An Asset-Liability Version of the Capital Asset pricing Model with a multi-period two-fund theorem”, en *The Journal of Portfolio Management*, 35/4 (2009) 111-131.